

Workshop beschrijvende meetkunde

Tot in de jaren 1960 van de vorige eeuw was 'beschrijvende meetkunde' een onderdeel van het vak wiskunde in het secundair onderwijs. Prisma's, piramides, (half)regelmatige veelvlakken, kegels, cilinders en bollen waren de lichamen die poseerden bij deze tekensessies. Deze lichamen konden elkaar wel eens ontmoeten en zelfs 'doorboren'. De leerlingen bleven echter braaf op hun plaats om nette 'epures' te maken van deze gebeurtenissen, volgens de projectiemethode van Gaspard Monge (1746-1818). Eerst werd alles in potlood en dan – hopelijk zonder vlekken – in Oost-Indische inkt getekend.

In deze workshop kun je iets van deze sfeer proeven. Zowel het ruimtelijk inzicht als de potloodpunten worden aangescherpt.

We zijn in 1957.

Eerst wordt de nodige voorkennis herhaald (bijlage 1).

Op de tafels ligt een blad klaar: de tekening waar je de vorige les al in potlood aan begonnen was (bijlage 2) Op het krijtbord is dezelfde tekening klaargezet.

De opgave vind je in bijlage 3. Er staan ook aanwijzingen om stap voor stap naar de oplossing te komen. De leraar tekent mee op het krijtbord (zie bijlage 4). Deelnemers die tijdig klaar zijn in potlood, kunnen het resultaat met trekpen in Oost-Indische inkt zetten. Een vlek betekent opnieuw beginnen. De oplossing zie je in bijlage 5.

Terug naar 2007.

Met dynamische meetkunde kunnen we – in plaats van een hele boel punten van de snijkromme te construeren en te verbinden – er ééntje construeren en gebruik maken van de knop 'meetkundige plaats' (**bijlage 6**). Bovendien kunnen we zien wat er aan het resultaat verandert als we de begingegevens verplaatsen. We vinden het ambachtelijk werken van 1957 charmant en leerrijk, maar we zien ook duidelijk de voordelen van de moderne technologie. Misschien ervaar je deze voordelen nog beter na deze ambachtelijke ervaring.

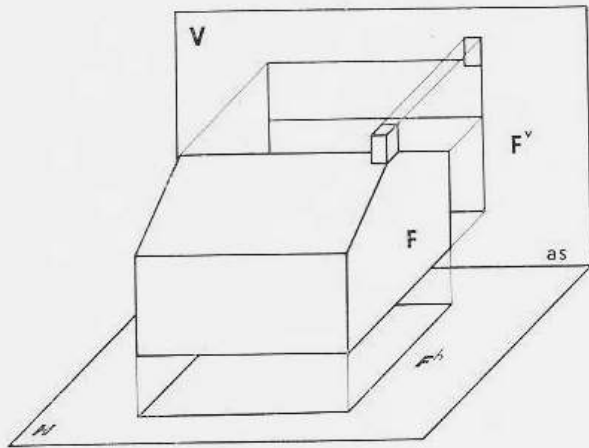
Michel Roelens
KHLim Lerarenopleiding Bachelor Secundair Onderwijs, Diepenbeek (België)

Bijlage 1 Herhaling van de voorkennis

Uit: R. Broeckx, Beschrijvende meetkunde, De Brug, De Nederlandse boekhandel, Antwerpen, 1963)

1. Methode van Monge: twee loodrechte projecties

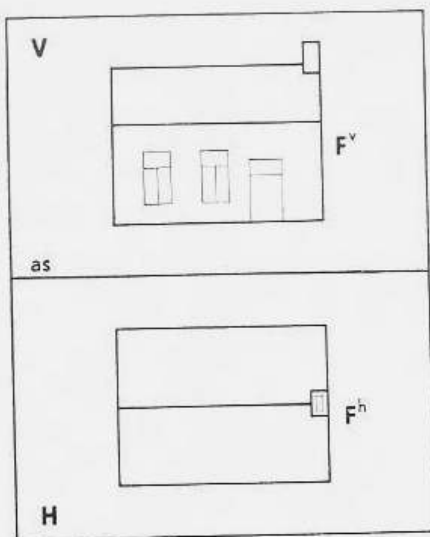
Om een ruimtefiguur F (b.v. een huis) op een vlak voor te stellen, kiest men in de ruimte twee vlakken, die loodrecht op elkaar staan. Deze vlakken worden



projectievlakken genoemd. Een dezer vlakken is het *horizontaal* of eerste projectievlak, het andere is het *verticaal* of tweede projectievlak. De woorden *horizontaal* en *verticaal* hoeven geen fysische betekenis te hebben. Het horizontaal projectievlak wordt voorgesteld door de letter H , het verticaal door de letter V . De snijlijn van de twee projectievlakken draagt de naam *as van projectie* of *grondlijn*.

(*) Monge (1746-1818) was een Franse wiskundige en staatsman.

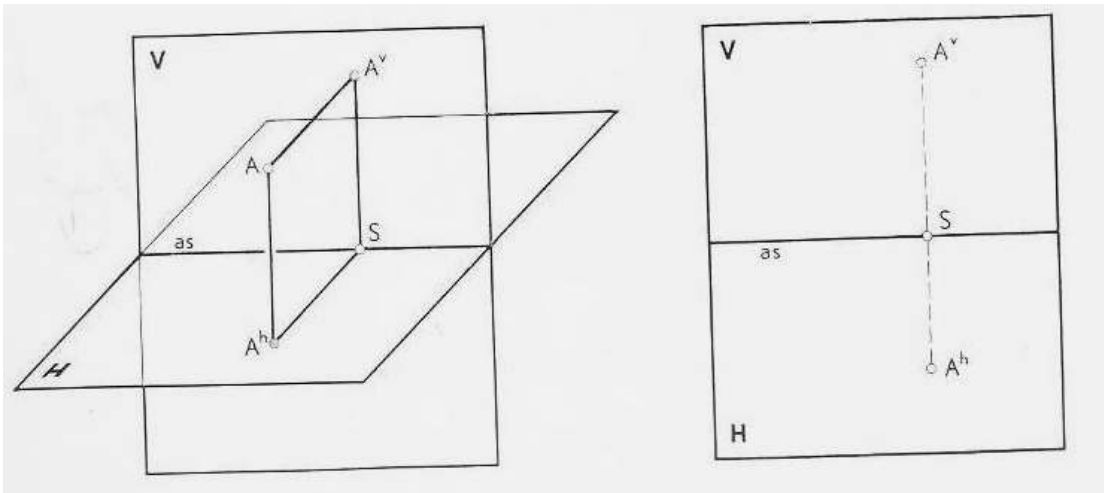
Men projecteert F loodrecht op H en op V . Deze twee projecties worden resp. *horizontale* en *verticale projectie* van F genoemd. Ze worden voorgesteld door F^h en F^v .



Zijn F^h en F^v gevonden, dan wentelt men een der projectievlakken om de *as van projectie* tot het samenvalt met het andere projectievlak (zie verder 2^{de} afspraak hieronder). Zodoende bekomt men een vlakke (dubbele) tekening, die *projectietekening* of *epure* genoemd wordt, en in de methode van Monge als vlakke voorstelling van de ruimtefiguur F gebruikt wordt.

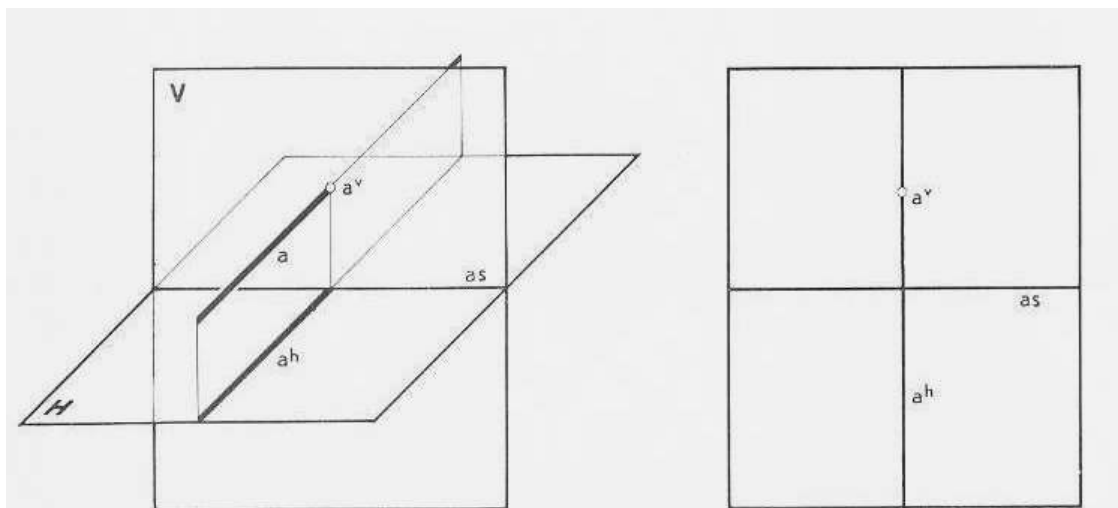
Daar men bijna nooit een ruimtefiguur in ware grootte op een projectietekening zal kunnen voorstellen, werkt men praktisch altijd op schaal.

2. Projecties van een punt



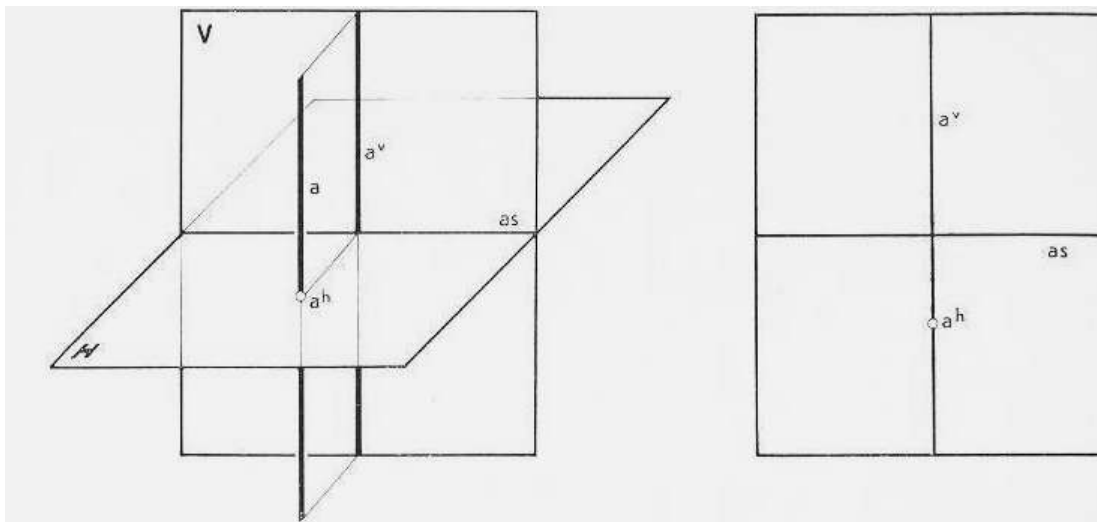
3. Speciale rechten

3.1 Koprechte en verticale rechte



Staat a loodrecht op V , dan noemt men haar een *koprechte*. Haar verticale projectie a^v is een punt. Haar horizontale projectie a^h is een rechte (*), die door a^v gaat en loodrecht staat op de as .

(*) In de ruimtemeetkunde leert men, dat de orthogonale projectie van een rechte op een vlak ook een rechte is, als de eerste rechte niet loodrecht staat op het vlak.

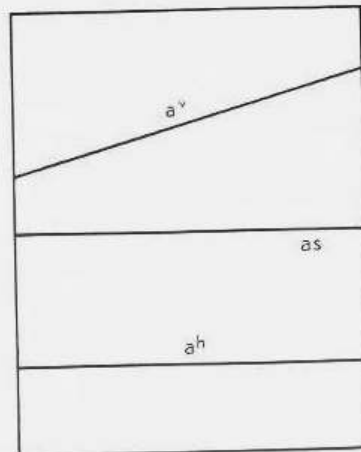
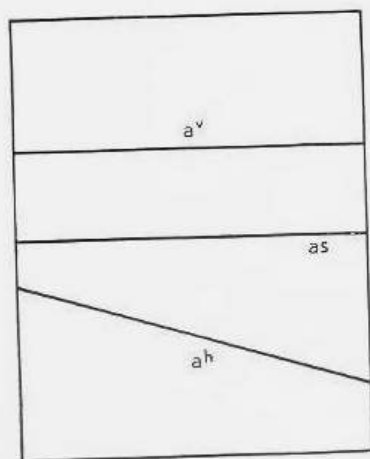


Staat a loodrecht op H , dan noemt men haar een *verticale* (rechte). Haar horizontale projectie a^h is een punt. Haar verticale projectie a^v is een rechte die door a^h gaat en loodrecht staat op de as .

3.2 Horizontale en frontale rechte

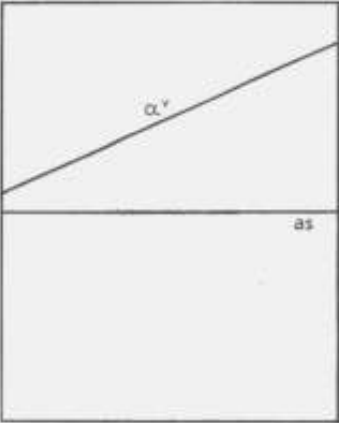
Een rechte a is een *horizontale* (rechte), als zij evenwijdig loopt met H . Een koprechte is dus een bijzondere horizontale rechte. Een horizontale rechte a , die geen koprechte is, bezit als kenmerk dat a^v evenwijdig is met de as .

Een rechte a is een *frontrechte* of *frontale* (rechte), als zij evenwijdig is met V . Een verticale is dus een bijzondere frontale. Een frontale rechte a , die niet verticaal is, bezit als kenmerk dat a^h evenwijdig is met de as .

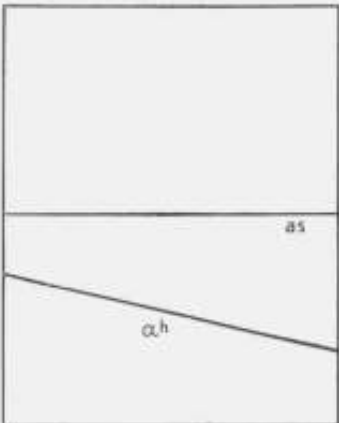


4. Speciale vlakken

4.1 Kopvlak en verticaal vlak



Staat α loodrecht op V, dan noemt men het een *kopvlak*. Zijn verticale projectie α^v is een rechte. Zijn horizontale projectie is meestal gans het vlak H en wordt dan niet getekend. Blijkbaar vormt de verticale projectie echter reeds een *ondubbelzinnige* voorstelling van het kopvlak.



Staat α loodrecht op H, dan noemt men het een *verticaal vlak*. Zijn horizontale projectie α^h is een rechte. Zijn verticale projectie is meestal gans het vlak V en wordt dan niet getekend. Opnieuw is de horizontale projectie reeds een *ondubbelzinnige* voorstelling van het verticaal vlak.

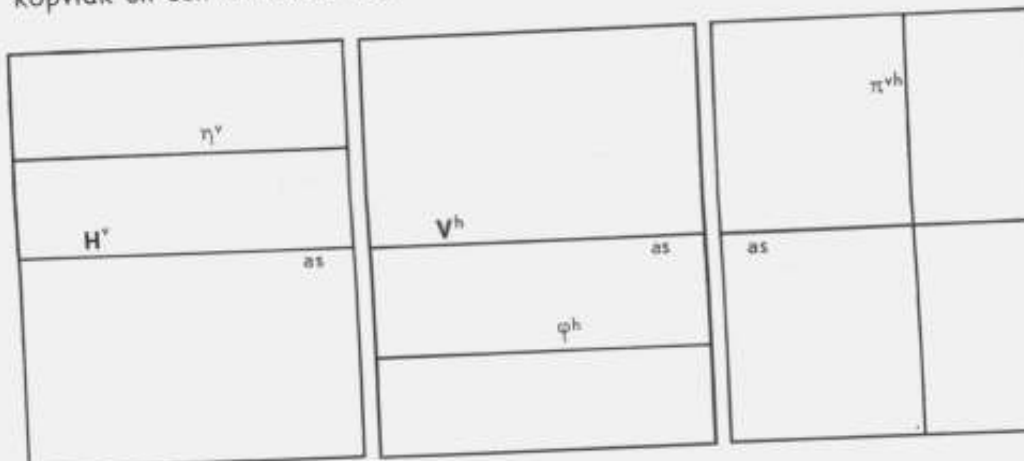
Wij onthouden:

4.2 Horizontaal vlak, frontaal vlak en profielvlak

Een (kop)vlak, dat evenwijdig is met H, wordt een *horizontaal vlak* genoemd. Het horizontaal projectievlak H is een bijzonder horizontaal vlak. Horizontale vlakken worden voorgesteld door hun verticale projectie.

Een (verticaal) vlak, dat evenwijdig is met V, wordt een *frontvlak* genoemd. Het verticaal projectievlak V is een bijzonder frontvlak. Frontvlakken worden voorgesteld door hun horizontale projectie.

Een vlak, dat loodrecht staat op de as van projectie en dus ook op elk der twee projectievlakken, wordt een *profielvlak* genoemd (cfr. hoofdstuk 1, nr. 1). Van een profielvlak tekent men de twee projecties. Het is tegelijkertijd een kopvlak en een verticaal vlak.



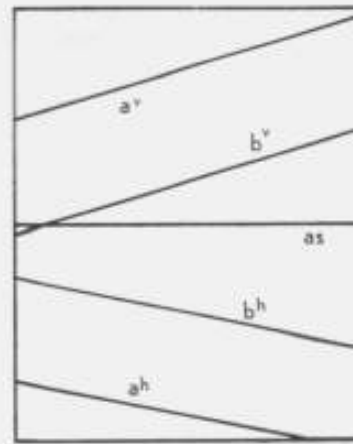
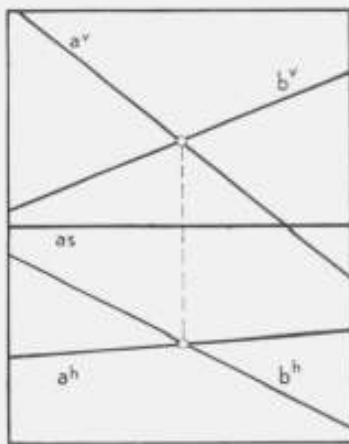
4.3 Willekeurig vlak

In de ruimtemeetkunde hebben we geleerd dat een vlak volkomen bepaald wordt door

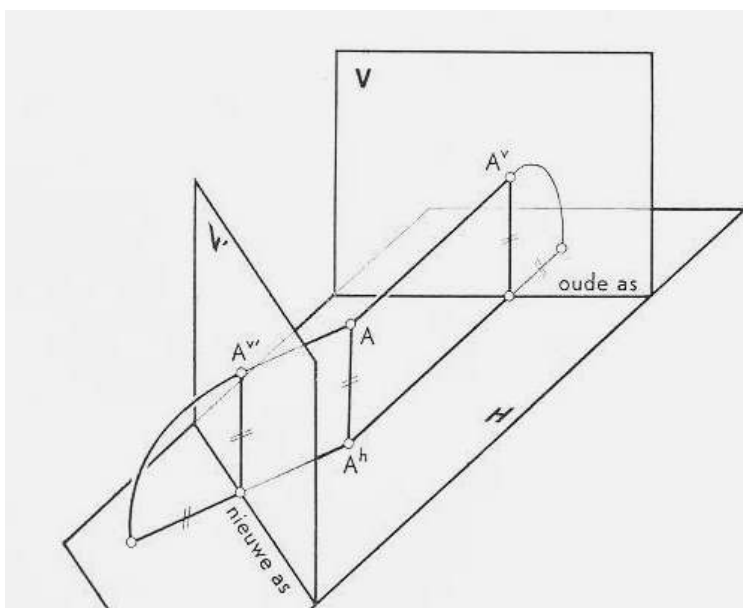
- 1) drie punten die niet op een rechte liggen,
- 2) een rechte en een punt buiten die rechte,
- 3) twee snijdende rechten,
- 4) twee evenwijdige rechten (*).

Om praktische redenen worden bij voorkeur de laatste twee voorstellingswijzen gebruikt.

Op de volgende projectietekeningen wordt links een vlak voorgesteld door twee snijdende rechten a en b , rechts door twee evenwijdige rechten a en b .



5. Nieuwe projectievlakken aannemen

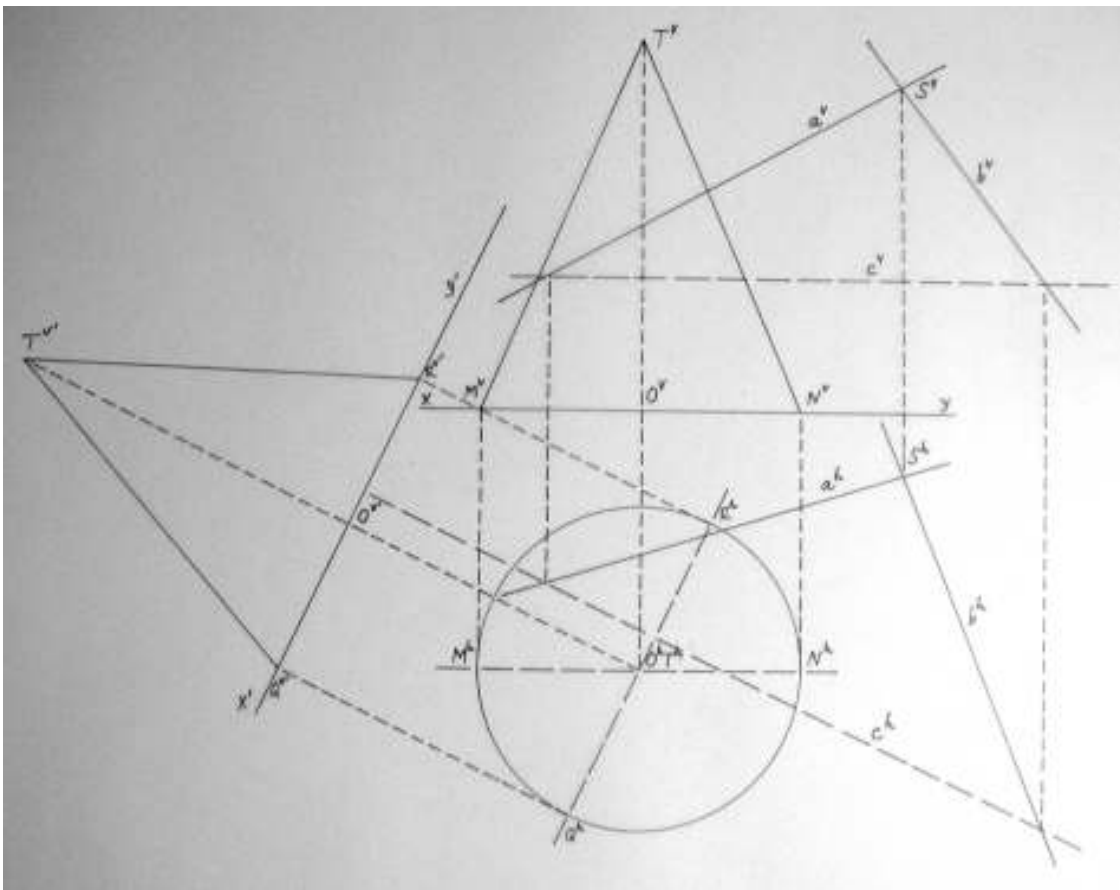


Op de eerste ruimte-tekening staan de oorspronkelijke projectievlakken V en H , alsmede een nieuw verticaal projectievlak V' . Deze vlakken vormen twee projectiestelsels: het oorspronkelijke stelsel (V, H) en een nieuw stelsel (V', H) . Er zijn twee projectie-assen. Elk punt A heeft drie projecties A^v , $A^{v'}$ en A^h .

5. Afspraken over lijnsoorten

Benaming:	Bestemming:
volle lijn lange-streeplijn korte-streeplijn puntlijn puntstreeplijn	kader, gegevens, resultaten hulplijnen of constructielijnen ophaallijnen onzichtbare lijnen op een lichaam (zie nr. 5) lijnen met een bijzondere functie

Bijlage 2 De tekening bij het begin van de workshop



Opdracht epure 2 februari 1957 Nationale Wiskunde Dagen

Gegeven twee projecties van een rechte cirkelkegel met grondvlak in het horizontaal projectievlak

een willekeurig vlak bepaald door de projecties van twee snijdende rechten a en b .

Gevraagd de snijding van de kegel met het vlak (ab)

de zichtbaarheid als het stuk boven (ab) wordt weggesneden

Aanwijzingen Vermits snijden met een kopvlak gemakkelijker is, kunnen we een nieuw verticaal projectievlak aannemen, zo dat in het nieuwe projectiestelsel het vlak (ab) een kopvlak is.

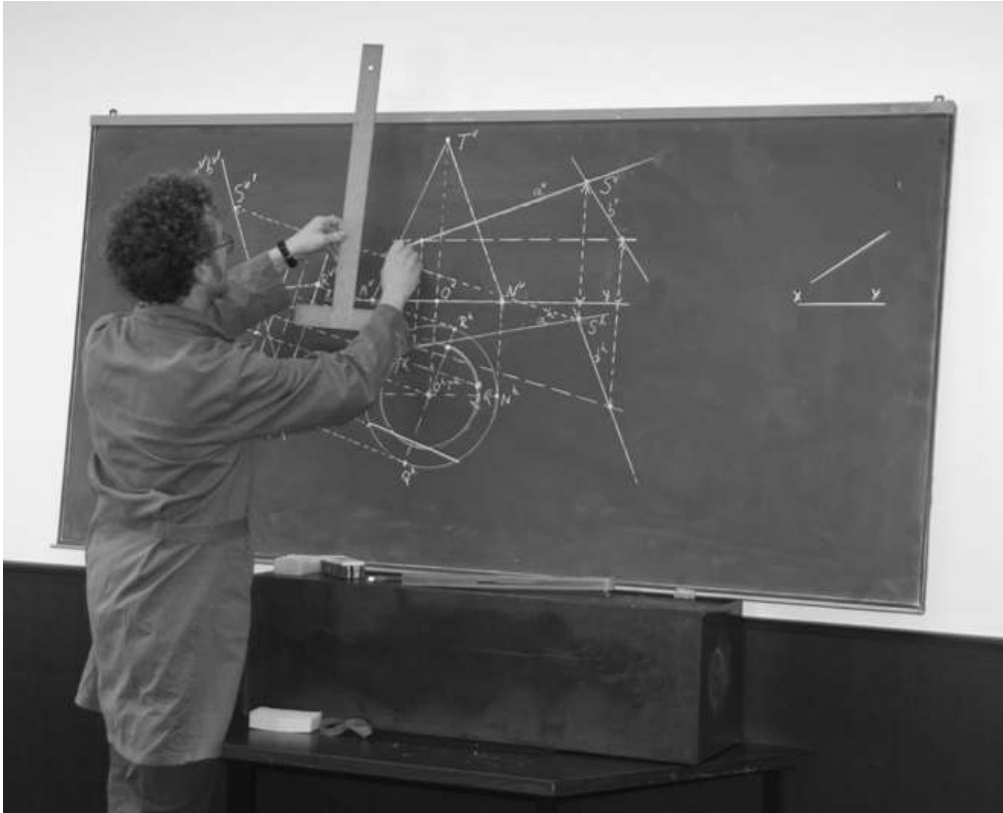
Dit nieuw verticaal projectievlak moet loodrecht staan op het vlak (ab) . Dit betekent dat de nieuwe as $X'Y'$ (of nog: het bovenaanzicht van het nieuw verticaal projectievlak) loodrecht moet staan op een horizontale rechte in het vlak (ab) .

Het probleem is dan herleid tot het bepalen van de snijding van een kegel met een kopvlak. Dit gebeurt gebruik makend van een stel horizontale hulpvlakken, die de kegel snijden volgens horizontale cirkels.

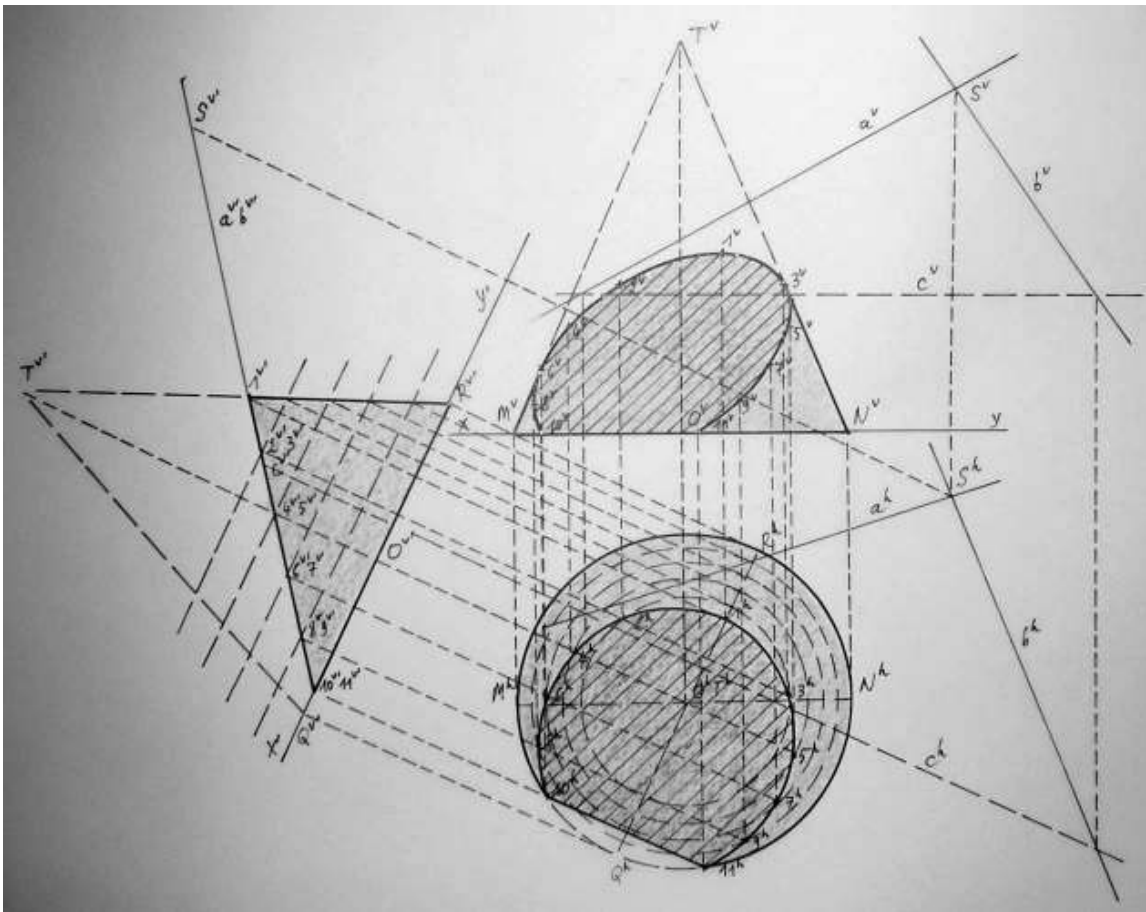
Thuis afwerken tegen volgende les.

M. Roelens

Bijlage 4 De leraar aan het bord



Bijlage 5 De afgewerkte tekening



Bijlage 6 Met dynamische meetkunde

